Maxwellove enačbe

Sinteza in sinopsis nista le estetski vrlini, ampak nam s pogledom nad celoto omogočita postavljanje novih hipotez in ugotavljanje pomanjkljivosti v strukturi in simetriji. Enačbe so najboljša sinteza s katero trenutno razpolaga znanost.

Škocki fizik *James Clerk Maxwell (1831-1879)* je želel dobiti take enačbe, ki bi popolnoma opisale električne in magnetne pojave, prav tako kot je naredil *Newton* za mehaniko. Iskal je sintezo zakonov, ki vodijo električno in magnetno polje.

Imel je na razpolago *Gaussov* zakon o električnem polju, *Ampèrov* zakon in *Faradayev* zakon o magnetnem polju: ugotovil je štiri enačbe, ki so zadostni pogoj za opis električnih in magnetnih polj. Enačbe so sledeče:

(1) **Gaussov zakon za električno polje** $\Phi(\vec{E})=\frac{Q}{\epsilon_0}$

(2) **Gaussov zakon za magnetno polje** $\Phi(\vec{B})=0$

(3) **Faraday-Neumannov zakon** $\Gamma(\vec{E})=\frac{-\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$

(4) **Amperov zakon** $\Gamma(\vec{B})=\mu_0 i+\epsilon_0\mu_0\frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$

Zanimiva posledica Maxwellovih enačb je obstoj elektromagnetnega valovanja, kot posledica spreminjajočih električnih in magnetnih polj. Obstoj elektromagnetnega valovanja lahko predvidevamo iz matematičnega opisa električnega in magnetnega polja. Leta 1886 je *Heinrich Hertz*(1857-1894) opravil eksperiment s katerim je dokazal obstoj elektromagnetnega valovanja.

Gaussov zakon v električnem polju

Pretok električnega polja v homogenem električnem polju je definiran kot :

$$\Phi(\vec{E})=E\,A\cos(\varphi)$$

kjer je A ploščina omejenega dela površine v električnem polju in φ kot med pravokotnico na ploščino in električnim poljem $\vec{E}$. Naj bo sedaj q točkast naboj in A površina krogle s središčem na točkastem naboju. Pretok skozi zaprto površino A je enak

$$(5) \qquad \Phi(\vec{E})=E\,A\cos(\varphi)=\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)(4\pi r^2)=\frac{q}{\epsilon_0}.$$

Tale rezultat se lahko posploši za katerokoli obliko naboja in katerokoli obliko zaprte površine. Če je $Q=\sum q$ vsota naboja, ki leži v notranjosti zaprte površine A, velja

$$(6) \qquad \Phi(\vec{E})=\frac{Q}{\epsilon_{0.}}$$

Gaussov zakon v magnetnem polju

Ker so silnice magnetnega polja $\vec{B}$ zaključene krivulje, ni namreč magnetnih monopolov, je pretok magnetnega polja skozi zaprto površino enak

$$(7) \qquad \Phi(\vec{B})=0.$$

Faraday-Neumanov zakon

V primeru homogenega električnega polja lahko definiramo napetost med dvema točkama X in Y kot $U_{X,Y}=E|\overrightarrow{XY}|\cos(\varphi)$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{E}$ in $\overrightarrow{XY}$. Če polje ni homogeno pa je treba pot razdeliti na manjše dele, oziroma uporabljati integral po krivulji. To fizikalno količino označimo bolj splošno v svetu vektorjev z

$$(8) \qquad \Gamma(\vec{E})=\sum_i E_i|\vec{l}_i|\cos(\varphi_i).$$

V enostavnih primerih homogenega magnetnega polja in ravnine A , ki jo omejuje zaključena krivulja γ , lahko pokažemo, da

$$(9) \qquad \Gamma(\vec{E})=\frac{-\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Ta rezultat velja tudi v primerih, ko magnetno polje ni homogeno in površina A ne leži na ravnini. Negativnemu predznaku v (8) pravimo Lenzov zakon. Inducirana napetost poganja inducirani tok v tako smer, da se ta upira vzroku njegovega nastanka: magnetno polje, ki nastane zaradi induciranega toka, ima nasprotno smer od obstoječega magnetnega polja, ki je omogočilo indukcijski tok.

Amperov zakon

Vemo, da magnetno polje $\vec{B}$ okrog dolgega ravnega prevodnika je tangentno na krožnice, ki ležijo na ravnini, ki je pravokotna na prevodnik. Jakost polja pa je enaka $B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$. Če izračunamo okrožje $\Gamma(\vec{B})$ po krožnici s polmerom r, dobimo seveda

(10) $\Gamma(\vec{B}) = \sum_i B_i |\vec{l}_i| \cos(0°) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i$

ker je magnetno polje vedno vzporedno s premikom.

Elektromagnetno valovanje

Če povzamemo vse omenjene zakone, dobimo

(11)
$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\Phi(\vec{B}) = 0$$
$$\Gamma(\vec{E}) = \frac{-\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$
$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i$$

Razvidne so nekatere asimetrije med električnim in magnetnim poljem: (a) pretok skozi zaprto površino je za električno polje $\vec{E}$ odvisen od vsebovanega naboja, za $\vec{B}$ pa je nič, ker ne obstajajo magnetni monopoli; (b) okrožje magnetnega polja po zaprti krivulji $\Gamma(\vec{B})$ je odvisno le od električnega toka, ne pa od električnega polja. Faraday se je vprašal, če je mogoče ustvariti magnetno polje tudi s spreminjanjem pretoka električnega polja in ne samo s prisotnostjo električnega toka; oziroma se je vprašal, kakšen pomen ima hitrost spreminjanja električnega pretoka.

(12) $\frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$

Čisto formalno, z željo da bi se znebil pomanjkanju simetrije, je Maxwell postavil sledečo hipotezo

(13) Maxwellova hipoteza $\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$

kjer dielektrična in indukcijska konstanta nastopita tako, da ima drugi člen vsote enake merske enote kot prvi člen vsote v **(12).** Kar je bila na začetku le drzna hipoteza in sad Maxwellove domišljije in vere v simetrijo matematičnih enačb, je postala osnova za elektromagnetno valovanje.

Obstoj elektromagnetnega valovanja je kasneje dokazal z eksperimentom Hertz. Valovanje se širi s konstantno hitrostjo $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.