

... ■ *Diferencialne enačbe* ■ ...

*prof. Walter Auber*  
*Znanstveni licej "France Prešeren"*

Trst, marca 2010



**Povzetek**


Povedali bomo, kaj so diferencialne enačbe in kako številna vprašanja iz fizike oblikujemo s pomočjo diferencialnih enačb. Rešili bomo tudi diferencialne enačbe in preučili funkcijo rešitev, ki nam omogoča predvidevanje obnašanja fizikalnih sistemov.

## Kazalo

<b>1</b>	<b>OPREDELITEV IN PRVI PRIMERI</b>	<b>3</b>
1.1	Definicija . . . . .	3
1.2	Padanje predmeta z uporom zraka . . . . .	4
1.3	Hlajenje predmeta . . . . .	5
1.4	Rast organizma . . . . .	5
1.5	Logistična enačba: dinamika populacije . . . . .	6
1.6	Električni krog RC . . . . .	6
1.6.1	Polnjenje kondenzatorja . . . . .	7
1.6.2	Praznjenje kondenzatorja . . . . .	7
<b>2</b>	<b>VZMETNO NIHALO</b>	<b>8</b>
2.1	Idealno vodoravno nihalo . . . . .	8
2.2	Idealno navpično nihalo . . . . .	8
2.3	Dušeno nihalo . . . . .	8
<b>3</b>	<b>ELEKTRIČNI NIHAJNI KROG</b>	<b>9</b>
3.1	Krog LC brez vira napetosti . . . . .	9
3.2	Krog LC z enosmernim virom napetosti . . . . .	10
3.3	Krog LC z izmeničnim virom napetosti . . . . .	10
3.4	Električni nihajni krog LCR . . . . .	10

## 1 OPREDELITEV IN PRVI PRIMERI

### 1.1 Definicija

unkcija odvod  $f'(x)$  dane funkcije  $f(x)$  predstavlja strmino tangente na graf funkcije  $f(x)$  v točki z absciso  $x$ , oziroma predstavlja trenutno hitrost spreminjanja vrednosti funkcije  $f$  ob spreminjanju neodvisne spremenljivke  $x$ . Nedoločeni integral  $F$  funkcije  $f$  je taka funkcija, da je njena funkcija odvod  $F'$  enaka začetni funkciji  $f$ ; oziroma  $F'(x) = f(x)$ . Če poznamo funkcijo in iščemo hitrost spreminjanja funkcije opravimo odvod, če poznamo hitrost spreminjanja in iščemo začetno funkcijo, opravimo integral.

Pogosto nam nista znani ne funkcija ne hitrost, ampak le neko razmerje med njima, neka funkcija, ki ju povezuje. Vzemimo na primer funkcijo  $f$  za katero velja da

$$f'(x) = f(x) \quad (1)$$

za katerikoli  $x \in \mathbb{R}$ . Iščemo torej funkcijo  $f$ , ki zadošča zgornjemu pogoju. Če delimo obe strani enačbe 1 z  $f(x)$  dobimo

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

če opravimo določeni integral obeh strani

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 1 dx$$

če vpeljemo novo spremenljivko  $y = f(x)$ , dobimo

$$\int \frac{1}{y} dy = x + k$$

oziroma

$$\ln(f(x)) = x + k$$

če izračunamo eksponentno funkcijo obeh strani

$$e^{\ln(f(x))} = e^{x+k} = e^x e^k$$

oziroma če napišemo  $A = e^k$  potem

$$f(x) = Ae^x$$

Torej vse funkcije, ki zadoščajo enačbi 1 so  $f(x) = Ae^x$  kjer je  $A \in \mathbb{R}$ . Enačbi 1 pravimo *diferencialna enačba*.

**Definicija 1.1.** Naj bo  $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  funkcija z  $n$  neodvisnimi spremenljivkami. Enačbi

$$F(f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

pravimo *diferencialna enačba*. Vsaki funkciji  $f$ , ki zadošča enačbi pa pravimo *rešitev diferencialne enačbe*.

## 1.2 Padanje predmeta z uporom zraka

V kinematiki so lega telesa glede na neko izbrano izhodišče referenčnega sistema  $x(t)$ , hitrost telesa  $v(t)$  in pospešek telesa  $a(t)$  funkcije časa. V enostavnih primerih poznamo eno izmed funkcij in dobimo ostale s pomočjo odvoda in nedoločenega integrala saj vemo, da  $v(t) = x'(t)$  in  $a(t) = v'(t) = x''(t)$ . Včasih pa ne poznamo nobene od teh funkcij, ampak le neko razmerje med njimi, to je neko diferencialno enačbo

$$F(x(t), x'(t), x''(t)) = 0$$

Vzemimo kot primer padanje predmeta z zračnim uporom. Če izberemo referenčni sistem obrnjen navzdol z izhodiščem v točki kjer predmet izpustimo, bosta na predmet delovali pozitivna gravitacijska sila  $F_g = mg$  in negativna sila upora zraka<sup>1</sup>, ki je premo sorazmerna hitrosti predmeta  $F_u = kv$ . Torej, če upoštevamo drugi Newtonov zakon  $F(t) = ma(t) = mx''(t)$ , dobimo da

$$mx''(t) = mg - kv'(t). \quad (2)$$

oziroma

$$mv'(t) = mg - kv(t). \quad (3)$$

V zgornji diferencialni enačbi je neznanka funkcija  $v(t)$ . Kot v prejšnjem primeru lahko obe strani enačbe delimo z  $mg - kv$  in dobimo

$$\frac{mv'(t)}{mg - kv(t)} = 1$$

nato

$$\int \frac{mv'(t)}{mg - kv(t)} dt = \int dt$$

in če uvedemo novo spremenljivko  $y = mg - kv(t)$  in upoštevamo, da  $(mg - kv(t))' = -kv'(t)$ , dobimo, da

$$-\frac{m}{k} \int \frac{y'}{y} dt = -\frac{m}{k} \ln(y) = -\frac{m}{k} \ln(mg - kv(t)) = t + \mu$$

Če obe strani enačbe pomnožimo z  $-\frac{k}{m}$  in izračunamo eksponentno funkcijo, dobimo

$$mg - kv(t) = e^{-kt - k\mu} = e^{-\frac{k}{m}t} e^{-\frac{k}{m}\mu}$$

Končno, če napišemo, da  $e^{-\frac{k}{m}\mu} = A$ , dobimo

$$kv(t) = mg - Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

oziroma

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{A}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$$

<sup>1</sup> za majhne hitrosti je  $F_u = kv$  za velike hitrosti pa je  $F_u = kv^2$

Graf funkcije  $v(t)$ 

Ker vemo, da smo telo izpustila, je  $v(0) = 0$  zato

$$v(0) = \frac{mg}{k} - \frac{A}{k} = 0$$

in iz tega dobimo  $A = mg$ . Funkcija hitrosti je zato

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad (4)$$

Zanimivo je izračunati limito hitrosti, za  $t \rightarrow \infty$ , saj bomo tako dobili mejno hitrost našega predmeta.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \right) = \frac{mg}{k}$$

Če funkcijo 4 integriramo in upoštevamo, da je začetna lega  $x(0) = 0$ , dobimo funkcijo poti  $x(t)$ .

**Definicija 1.2.** Diferencialni enačbi z danimi začetnimi pogoji pravimo Cauchyjev<sup>2</sup> problem.

$$\begin{cases} F(x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \\ x'(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

### 1.3 Hlajenje predmeta

Radi bi preučili spreminjanje temperature v času  $T(t)$  nekega predmeta, ki ima začetno temperaturo  $T_0$  in ki ga postavimo v dotik z okoljem, ki ima konstantno temperaturo  $A$ . Predmet se hladi, temperatura okolja pa se ne spreminja; na primer hlajenje vroče vode v kopeli. Trenutna hitrost spreminjanja temperature je nedvomno enaka odvodu funkcije  $T(t)$ , saj je povprečna hitrost enaka ulomku  $\frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t}$ . Termodinamika nas uči, da je hitrost manjšanja temperature nekega predmeta sorazmerna z razliko med trenutno temperaturo predmeta in temperaturo okolja. To trditev lahko napišemo s pomočjo diferencialne enačbe in Cauchyjevega problema:

$$\begin{cases} T'(t) = -\alpha(T(t) - A) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (5)$$

Če je  $T(t) > A$  bo odvod  $T'(t)$  negativen, kar pomeni, da bo temperatura predmeta padala; v obratnem primeru bo  $T'(t)$  pozitiven, kar pomeni, da se bo telo segrevalo. Koeficient  $\alpha$  je odvisen od specifične toplote snovi, ki se hladi. Zgornjo diferencialno enačbo kar takoj rešimo, kot smo že storili v prejšnjih dveh primerih in dobimo, da

$$T(t) = (T_0 - A)e^{\alpha t} + A$$

---

<sup>2</sup>matematik Cauchy

Kot si pričakujemo je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = A$$

saj se bo temperatura predmeta približevala temperaturi okolja.

#### 1.4 Rast organizma

Prirastek v masi nekega organizma je pogosto premo sorazmeren z maso: večjo maso ima organizem, večji bo prirastek mase v določenem časovnem intervalu. Tudi ta zakon lahko napišemo s pomočjo diferencialne enačbe

$$m'(t) = \alpha m(t)$$

kjer je  $m(t)$  predstavlja maso organizma v trenutku  $t$  in  $m'(t)$  predstavlja trenutno hitrost spreminjanja mase organizma ter  $\alpha$  predstavlja neko konstanto, ki je značilna za organizem. Rešitev diferencialne enačbe je

$$m(t) = m_0 e^{\alpha t}$$

kjer je  $m_0$  začetna masa organizma.

#### 1.5 Logistična enačba: dinamika populacije

Ko študiramo, kako se spreminja število prebivalcev neke države ali število bakterij v neki epruveti ali število okuženih z neko boleznijo v danem mestu ugotovimo, da hitrost spreminjanja števila prebivalcev oziroma hitrost spreminjanja števila bakterij oziroma hitrost spreminjanja okuženih niso premo sorazmerni s trenutnim številom prebivalcev oziroma trenutnim številom bakterij oziroma s trenutnim številom obolelih. Če malo razmislimo, bomo ugotovili, da se hitrost večanja prebivalstva na začetku veča, da ima hitrost večanja prebivalstva v *omejenem prostoru* neko zgornjo mejo in nato, da se hitrost večanja prebivalstva manjša. Važno je poudariti, da prostor omejen. Diferencialni enačbi, ki opisuje to dinamiko, pravimo *logistična enačba*:

$$n'(t) = \alpha n(t) \left( 1 - \frac{1}{\beta} n(t) \right) \quad (6)$$

kjer predstavlja  $\alpha$  prirastek, ki ga dobimo kot razliko med odstotkom rojenih in odstotkom umrlih;  $\beta$  pa predstavlja omejenost okolja. Enačbo rešimo tako, da obe strani enačbe delimo z  $n(t)^2$

$$\frac{n'(t)}{n(t)^2} = \alpha \left( \frac{1}{n(t)} - \frac{1}{\beta} \right)$$

Ker  $\frac{n'(t)}{n(t)^2} = - \left( \frac{1}{n(t)} \right)'$ , lahko napišemo, da

$$- \left( \frac{1}{n(t)} \right)' = \alpha \left( \frac{1}{n(t)} - \frac{1}{\beta} \right)$$

Če definiramo  $z(t) = \frac{1}{n(t)}$ , dobimo

$$z'(t) = -\alpha z(t) + \frac{\alpha}{\beta}$$

ki ima rešitev

$$z(t) = \left( \frac{1}{N_0} - \frac{1}{\beta} \right) e^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta}$$

kjer je  $N_0$  začetna populacija. Končno dobimo

$$n(t) = \frac{1}{\left( \frac{1}{N_0} - \frac{1}{\beta} \right) e^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta}}$$

ki predstavlja rešitev logistične enačbe.

## 1.6 Električni krog RC

Ko se fizikalne količine tok v tokokrogu, napetost na uporniku ali na ploščah kondenzatorja in naboj na ploščah kondenzatorja spreminjajo, si jih predstavljamo kot funkcije časa:  $i(t)$ ,  $u(t)$ ,  $q(t)$ .

### 1.6.1 Polnjenje kondenzatorja

Vir napetosti s konstantno napetostjo  $U$  povežemo zaporedno z Ohmovim upornikom  $R$  in kondenzatorjem  $C$ . Vemo, da je napetost na uporniku  $u_R(t) = R i(t)$  in da je kapacitivnost kondenzatorja konstanta premo sorazmernosti med trenutnim nabojem na ploščah kondenzatorja  $q(t)$  in napetostjo med ploščama kondenzatorja  $u_C(t)$ : zato je  $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ . Ker so upornik, kondenzator in vir napetosti vezani zaporedno je tok za vse enak  $i(t)$ .

Lahko napišemo, da

$$U = u_C(t) + u_R(t)$$

oziroma

$$\frac{q(t)}{C} + R i(t) - U = 0.$$

Ker je trenutni tok odvod funkcije naboj  $i(t) = q'(t)$ , postane zgornja enačba

$$\frac{1}{C}q(t) + Rq'(t) - U = 0. \quad (7)$$

Dobili smo spet diferencialno enačbo, ki je podobna enačbi 3 za padanje predmeta z uporom zraka. Vemo že, kako se enačbo reši:

$$Rq'(t) = U - \frac{1}{C}q(t)$$

oziroma

$$\frac{Rq'(t)}{U - \frac{1}{C}q(t)} = 1$$

in če izračunamo integral obeh strani, dobimo

$$\int \frac{Rq'(t)}{U - \frac{1}{C}q(t)} dt = \int dt$$

oziroma

$$\int \frac{q'(t)}{CU - q(t)} dt = \int \frac{1}{RC} dt$$

in če uvedemo novo spremenljivko  $y = CU - q(t)$ , dobimo

$$\int \frac{1}{y} dt = -\frac{1}{RC} t$$

ki ima rešitev

$$\ln(y) = -\frac{1}{RC} t$$

oziroma

$$q(t) = CU \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

Odvod zadnje enačbe nam da tok, ki teče skozi tokokrog

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Razvidno je, da je tok na začetku maksimalen in sicer  $i(t) = \frac{U}{R}$  in ima limito nič. Rešitev diferencialne enačbe predstavlja polnjenje kondenzatorja.

### 1.6.2 Praznjenje kondenzatorja

Če kondenzator  $C$  na katerem je začetna napetost  $U$  povežemo zaporedno z upornikom  $R$ , se bo kondenzator spraznil: tok bo na začetku velik in limita toka ko  $t \rightarrow \infty$  bo nič. Ustrezna diferencialna enačba bo

$$\frac{1}{C}q(t) + Rq'(t) = 0. \quad (8)$$

## 2 VZMETNO NIHALO

### 2.1 Idealno vodoravno nihalo

Idealno vzmetno nihalo sestavljata utež  $m$  in idealna vzmet, ki sledi Hookovemu zakonu in deluje na predmet s silo  $f(x) = -kx$  kjer je  $x$  raztezek vzmeti in  $k$  konstanta vzmeti. Lahko napišemo, da

$$mx''(t) = -kx(t) \quad (9)$$

To je diferencialna enačba druge stopnje, ker imamo drugi odvod neznane funkcije. Rešitve te enačbe so vse funkcije

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

kjer sta  $A$  in  $\alpha$  konstanti odvisni od začetna lega nihala  $x(0)$  in začetne hitrosti nihala  $v(0)$  ter  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je kotna hitrost.

## 2.2 Idealno navpično nihalo

Pri navpičnem nihalu delujeta na maso dve sili: gravitacijska konstantna sila in spreminjajoča sila vzmeti. Diferencialna enačba, ki opisuje sistem je

$$mx''(t) = mg - kx(t) \quad (10)$$

Če uvedemo novo spremenljivko  $y(t) = x(t) + \frac{mg}{k}$  in jo vstavimo v zgornjo enačbo dobimo, da

$$my''(t) = mg - k \left( y(t) - \frac{mg}{k} \right)$$

saj je  $x''(t) = y''(t)$ , in zato dobimo diferencialno enačbo, ki je enaka diferencialni enačbi za vodoravno vzmet.

$$my''(t) = -ky(t)$$

Tudi to nihalo niha harmonično in sicer  $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) - \frac{mg}{k}$ .

## 2.3 Dušeno nihalo

Če idealnemu vodoravnemu nihalu dodamo še silo, kise upira premikanju nihala, potem govorimo o dušenem nihanju. Za majhne odmike od ravnovesne lege lahko trdimo, da je sila upora premo sorazmerna s hitrostjo gibanja nihala  $F_u = -\gamma x'(t)$ . V tem primeru postane diferencialna enačba sistema

$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t) \quad (11)$$

Tale diferencialna enačba je nekoliko težja od ostalih, ki smo jih do sedaj preučevali, saj vsebuje funkcijo  $x(t)$ , njen prvi odvod  $x'(t)$  in njen drugi odvod  $x''(t)$ . Se lahko dokaže, da so rešitve zgornje enačbe vse funkcije

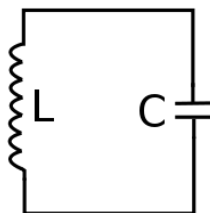
$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad (12)$$

Konstanti  $\beta$  in  $\omega_d$  določimo tako, da funkcijo 12 vstavimo v enačbo 11. Dobili bomo da

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega_d^2 = \beta^2 - \frac{\beta\gamma}{m} + \omega^2$$

kjer je  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  kotna hitrost nihala, ki ni dušeno. Lahko ugotovimo, da je  $\omega_d < \omega$ . Rešitev diferencialne enačbe si lahko ogledaš na sliki [geogebra/duseno.png](#) ali pa lahko eksperimentiraš z dinamičnim delovnim listom [geogebra/duseno.html](#).



Slika 1: Električni nihajni krog LC

### 3 ELEKTRIČNI NIHAJNI KROG

Električni nihajni krog je sestavljen iz kondenzatorja, tuljave in morebitno še iz upornika in vira napetosti. V poglavju 1.6 smo že opredelili funkciji  $i(t) = q'(t)$  in  $u(t)$  ter napetost na ploščah kondenzatorja  $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$  in napetost na uporniku  $u_R = Ri(t)$ .

Napetost  $u_L(t)$ , ki se inducira na tuljavi skozi katero teče tok  $i(t)$ , dobimo z indukcijskim zakonom, ki pravi, da se v tokokrogu, ki zajema magnetni pretok  $\Phi(t)$  inducira napetost  $u(t) = \Phi'(t)$ . Tuljava, ki ima  $n$  ovojev, dolžino  $l$  in skozi katero teče tok  $i(t)$  proizvaja v svoji notranjosti homogeno magnetno polje  $B(t) = \frac{\mu_0 n}{l} i(t)$ . Pretok skozi  $n$  ovojev tuljave, ki zajemajo površino  $S$ , je zato

$$\Phi(t) = nSB(t) = nS \frac{\mu_0 n}{l} i(t) = Li(t)$$

če označimo z

$$L = \frac{\mu_0 n^2 S}{l}$$

induktivnost tuljave. Če uporabljamo indukcijski zakon, dobimo, da se na tuljavi inducira napetost

$$u_L(t) = \Phi'(t) = (Li(t))' = Li'(t)$$

#### 3.1 Krog LC brez vira napetosti

Vsota napetosti na kondenzatorju in tuljavi je v vsakem trenutku  $t$  enaka nič.

$$u_C(t) + u_L(t) = 0$$

Če vstavimo ustrezne napetosti, dobimo

$$\frac{q(t)}{C} + Li'(t) = 0$$

Če izračunamo odvod obeh strani enačbe, dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{q'(t)}{C} + Li''(t) = 0$$

oziroma

$$i''(t) = -\frac{1}{CL} i(t) \tag{13}$$

Kot za idealno vzmet je rešitev te enačbe harmonično nihanje

$$i(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

kjer je  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  resonančna frekvenca ter sta  $A$  in  $\alpha$  odvisna od začetnih pogojev.

### 3.2 Krog LC z enosmernim virom napetosti

Dodajmo sedaj našemu tokokrogu še konstanten vir napetosti  $U$ . Diferencialna enačba postane

$$u_C(t) + u_L(t) = U$$

oziroma

$$\frac{1}{C}q(t) + Li'(t) - U = 0$$

oziroma

$$\frac{1}{C}q(t) + Lq''(t) - U = 0,$$

ki ima enako obliko kot enačba 10 za navpično nihalo in se jo zato reši na enak način z uvedbo nove spremenljivke. Rešitev diferencialne enačbe nam pove, da tudi nihajni krog z konstantnim virom napetosti nih aharmonično.

### 3.3 Krog LC z izmeničnim virom napetosti

Recimo, da povežemo zaporedno kondenzator  $C$ , tuljavo  $L$  in sinusni vir napetosti  $u(t) = U \sin(\omega_v t)$ . Diferencialna enačba sistema je

$$u_C(t) + u_L(t) = u(t)$$

oziroma

$$\frac{1}{C}q(t) + Li'(t) - U \sin(\omega_v t) = 0$$

oziroma

$$\frac{1}{C}q(t) + Lq''(t) - U \sin(\omega_v t) = 0$$

Te enačbe ne bomo rešili.

### 3.4 Električni nihajni krog LCR

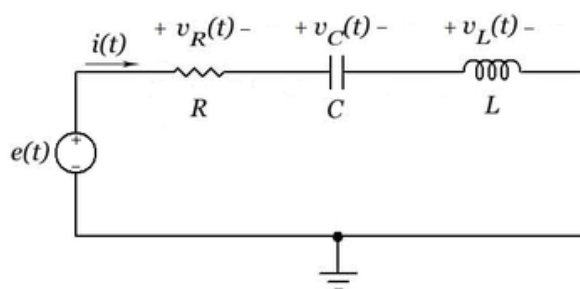
Upoštevajmo sedaj električni nihajni krog s kondenzatorjem, tuljavo, upornikom in virom konstantne napetosti.

Ustrezna diferencialna enačba je seveda

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = e(t)$$

oziroma

$$R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) + \frac{1}{C}q(t) = e(t).$$



Slika 2: Dušeni nihajni krog LCR

Če odvajamo obe strani enačbe dobimo

$$Ri'(t) + Li''(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

oziroma

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{CL}i(t) = 0$$

Ta enačba je podobna enačbi 11 za dušeno nihalo in ima zato enako rešitev

$$i(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_d t + \alpha) \quad (14)$$

Konstanti  $\beta$  in  $\omega_d$  določimo tako, da zgornjo funkcijo vstavimo v diferencialno enačbo. Dobili bomo da

$$\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_d^2 = \beta^2 - \frac{\beta R}{L} + \omega^2$$

kjer je  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  kotna hitrost nihajnega kroga brez dušenja.