Afine transformacije

Analitični pogled
fiksne točke
fiksne premice

prof. Walter Auber

Znanstveni licej "F. Prešeren"

Trst, marca 2010

Povzetek

V tem članku bomo pokazali, kako so podobnosti in izometrije le posebni primeri afinih transformacij. Pokazali bomo tudi, kako ugotovimo, katere so *fiksne oziroma nepremične točke* in katere so *fiksne oziroma nepremične premice* afinih transformacij.

Kazalo

1 Afine transformacije

Ko smo obravnavali transformacije Evklidove ravnine, smo začeli z izometrijami, ki ohranijo razdalje med točkami, nato smo prešli k podobnostim, ki ohranijo razmerje razdalj med točkami in nazadnje smo opredelili še afine transformacije, ki so najbolj splošne in ki zadoščajo edinemu pogoju, da ohranijo premice. V tem članku bomo pokazali, kako so podobnosti in izometrije le posebni primeri afinih transformacij; to pomeni, da so podobnosti in izometrije afine transformacije, ki zadoščajo še dodatnim pogojem. Pokazali bomo tudi, kako ugotovimo, katere so *fiksne točke* in katere so *fiksne premice* afinih transformacij.

Definicija 1.1. *Afina transformacija je bijektivna preslikava Evklidove ravnine, ki ohrani premice, to pomeni, da je slika premice še vedno premica.*

Izrek 1.2. *Afina transformacija ohrani vzporednost oziroma sliki r' in s' dveh vzporednih premic r in s sta vzporedni premici.*

Dokaz: Naj bo T afina transformacija; T je bijektivna preslikava, zato obstaja njena inverzna preslikava T^{-1}. r in s sta vzporedni premici, zato nimata skupnih točk; če bi r' in s' ne bili vzporedni, bi imeli skupno točko A' in $T^{-1}(A')$ bi bila skupna točka r in s, kar je v protislovju z začetno hipotezo.[1] **Q.E.D.**

Izrek 1.3. *Analitična oblika afinih transformacij je sledeča*

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{1}$$

kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Naj bo $r : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ enačba premice in T afina transformacija

$$T : \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

Radi bi pokazali, da je tudi $r' = T(r)$ premica. Kot smo že videli, dobimo enačbo preslikanega predmeta r' s pomočjo inverzne preslikave T^{-1}, saj je

$$r' : \alpha f^{-1}(x', y') + \beta g^{-1}(x', y') + \gamma = 0$$

Razvidno je, da bo r' imela obliko premice $r' : \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' = 0$ samo v primeru, da imamo

$$T^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(x', y') = \frac{mx'+ny'+p}{qx'+ry'+s} \\ y = g^{-1}(x', y') = \frac{hx'+ky'+j}{qx'+ry'+s} \end{cases}$$

Vstavimo zgornji enačbi v enačbo premice r in dobimo

$$r' : \alpha\left(\frac{mx' + ny' + p}{qx' + ry' + s}\right) + \beta\left(\frac{hx' + ky' + j}{qx' + ry' + s}\right) + \gamma = 0$$

Če obe strani zgornje enačbe pomnožimo z $qx' + ry' + s$, dobimo zaželeno obliko za r'. Treba je še dodati pogoj bijektivnosti za

[1] Dokaz po absurdu: osnovna logika nas uči, da je resnica trditve $A \Rightarrow B$ ekvivalentna resnici $\neg B \Rightarrow \neg A$ oziroma $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.

T: če sta q in r različna od nič, potem preslikava ni surijektivna saj točke $P(x', y')$ za katere je $qx' + ry' + s = 0$ niso slika nobene točke iz dominija. Končno lahko napišemo

$$T^{-1}: \begin{cases} x = \frac{mx'+ny'+p}{s} = ax' + by' + e \\ y = \frac{hx'+ky'+j}{s} = cx' + dy' + f \end{cases}$$

kjer je $a = \frac{m}{s}, b = \frac{n}{s}, \ldots$. Iz prejšnjih enačb za T^{-1} lahko izpeljemo enačbi za T v primeru in samo v primeru, da je sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama rešljiv[2]. Iz linearne algebre vemo, da je to mogoče, če in samo če koeficienti zgornjih enačb zadoščajo neenačbi $ad - bc \neq 0$. V primeru, da $ad - bc = 0$,lahko odštejemo prvo enačbo pomnoženo z d od druge enačbe pomnožene z b in ugotovimo, da x' in y' izgineta: sistem v tem primeru ni rešljiv, torej transformacija T nima inverzne transformacije T^{-1} **Q.E.D.**

Primer: Določi afino transformacijo, ki preslika točke $A(0,0); B(1,0); C(0,1)$ v točke $A'(4,1); B'(6,2); C'(3,4)$.

Veljata še dva zanimiva in koristna izreka.

Izrek 1.4. *Dane tri nekolinearne točke $A, B, C \in \mathscr{E}$ in tri nekolinearne točke $A', B', C' \in \mathscr{E}'$, obstaja ena in ena sama afina transformacija $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$, tako da*

$$T(A) = A',\ T(B) = B',\ T(C) = C'$$

[2]oziroma, ko je T^{-1} injektivna

Izrek 1.5. *Afine transformacije ohranijo razmerje med razdaljami med kolinearnimi točkami, oziroma, če imamo tri kolinearne točke $A, B, C \in \mathscr{E}$ za katere velja*

$$\frac{d(A,B)}{d(A,C})) = h$$

potem

$$\frac{d(T(A),T(B))}{d(T(A),T(C)} = h$$

Tudi afine transformacije sestavljajo grupo $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ in spadajo v Erlangenski program. Analitična oblika afinih transformacij je

$$T: \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{3}$$

oziroma z matrikami

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{4}$$

kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Obvezen je še potreben pogoj za koeficiente a, b, c in d, ki morajo biti taki, da ima 3 inverzno preslikavo: to je $ad - bc \neq 0$. Vrednosti $\Delta = ad - bc$ pravimo *determinanta matrike* in napišemo

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

V strnjeni obliki lahko napišemo tudi

$$X' = A\,X + B \tag{5}$$

kjer je $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Inverzno afino transformacijo

$$T^{-1} : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$$

dobimo tako, da rešimo sistem 3 oziroma sistem 4. Če uporabljamo algebro matrik, najprej obema stranema enačbe $X' = A\,X + B$ odštejemo B in dobimo $X - B = A\,X$, nato pomnožimo obe strani z inverzno matriko A^{-1} in dobimo, da

$$X = A^{-1}(X - B)$$

Inverzna matrika je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\,A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Brez jezika matrik je inverzna afina transformacija

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{\det\,A}(dx' - by' - de - bf) \\ y = \frac{1}{\det\,A}(-cx' + ay' + ce - af) \end{cases} \tag{6}$$

Izrek 1.6. *Naj bo T afina transformacija, S ploščina sklenjene krivulje in $T(S)$ ploščina preslikane krivulje. Razmerje med ploščino preslikane krivulje $T(S)$ in ploščino krivulje S je konstantno in*

$$\frac{T(S)}{S} = |detA|$$

2 Podgrupe grupe afinih transformacij

2.1 Podobnosti

Smo že ugotovili, da je množica podobnosti podmnožica množice afinih transformacij in da je tudi njena podgrupa v kolikor je kompozicija podobnosti podobnost, vsaka podobnost ima inverzno transformacijo in identiteta je podobnost. Velja sledeči izrek.

Izrek 2.1. *Afina transformacija T*

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

je podobnost, če in samo če

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Dokaz: Vemo, da je analitična oblika podobnosti

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Iz tega sledi, da so $a = k\cos(\alpha)$, $b = -k\sin(\alpha)$, $c = k\sin(\alpha)$ in $d = k\cos(\alpha)$. Zato, ko imamo afino transformacijo, ki zadošča pogojem 7 lahko določimo k in α, da so zadovoljene zgornje enakosti. **Q.E.D.**

Številu $k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$ pravimo *količnik podobnosti.*

Primer: Pokaži, da je sledeča afina transformacija podobnost in izračunaj njen količnik podobnosti.

$$T: \begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = 2x + 3y - 4 \end{cases}$$

2.2 Izometrije, zrcaljenje preko poljubne premice

Afina transformacija T je izometrija, če in samo če je podobnost s količnikom podobnosti enakim ena

$$k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} = 1$$

Poglejmo sedaj, kako dobimo enačbe zrcaljenja S_p preko neke premice $p: \ y = mx+n$. Če je $P(x,y)$ poljubna točka in $P'(x'y')$ njena slika preko zrcaljenja S_p, potem velja, da:

- središčna točka M med P in P' leži na premici p in $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$
- premica skozi P in P' je pravokotna na premico p in ima zato strmino $-\frac{1}{m}$

Če koordinati točke M vstavimo v enačbo premice p, dobimo

$$\frac{y+y'}{2} = m\left(\frac{x+x'}{2}\right) + n \tag{8}$$

če izračunamo strmino premice, ki vsebuje P in P' kot razmerje razlike koordinat, dobimo

$$-\frac{1}{m} = \frac{y'-y}{x'-x} \tag{9}$$

Če združimo enačbi 8 in 9, dobimo

$$\begin{cases} \frac{y+y'}{2} = m\left(\frac{x+x'}{2}\right) + n \\ -\frac{1}{m} = \frac{y'-y}{x'-x} \end{cases} \tag{10}$$

To je sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama x' in y'. Ko sistem rešimo, dobimo analitično obliko preslikave.

Problem lahko rešimo tudi vektorsko. Naj bo $\overrightarrow{OP'}$ vektor položaja točke P', $\overrightarrow{OP}$ vektor položaja točke P in $\overrightarrow{OM'}$ vektor položaja točke M. Razvidno je, da velja

$$\begin{aligned} \vec{OP'} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \\ &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PM} = \\ &= \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) = \\ &= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

Koordinati vektorja $\overrightarrow{OP'}$ predstavljata koordinati preslikane točke P'.

2.3 Homotetije

Izrek 2.2. *Afine transformacije oblike*

$$T: \begin{cases} x' = & ax & & +e \\ y' = & & ay & +f \end{cases} \tag{11}$$

predstavljajo homotetije okrog točke $A\left(\frac{e}{1-a}, \frac{f}{1-a}\right)$.

Dokaz: Če homotetijo okrog poljubne točke $A(l,m)$ napišemo kot kompozicijo treh transformacij

$$\mathscr{E} \xrightarrow{T_{-l\mathbf{i}-m\mathbf{j}}} \mathscr{E}' \xrightarrow{h_{0,k}} \mathscr{E}'' \xrightarrow{T_{l\mathbf{i}+m\mathbf{j}}} \mathscr{E}'''$$

dobimo, da

$$T : \begin{cases} x''' = kx + l(1-k) \\ y''' = ky + m(1-k) \end{cases} \tag{12}$$

Če primerjamo enačbi 11 in 12, je razvidno, da če zamenjamo $k = a$ in $e = l(1-k)$ ter $f = m(1-k)$ je izrek dokazan. **Q.E.D.**

2.4 Raztegi

Razteg je afina transformacija tipa

$$T : \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

3 Nepremične točke

Definicija 3.1. *Naj bo* T *afina transformacija in* $P \in \mathscr{E}$ *točka. Pravimo, da je točka* P *nepremična oziroma fiksna, če in samo če* $T(P) = P$

Afinim transformacijam T, ki imajo izhodišče kot nepremično točko, pravimo *linearne* transformacije. Njihove enačbe so sledeče:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{13}$$

Z lahkoto dokažemo, da $T(P+Q) = T(P) + T(Q)$ in da $T(kP) = kT(P)$, kjer so $P, Q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $k \in \mathbb{R}$; to je tudi razlog, da jih imenujemo linearne transformacije.

Poglejmo sedaj, kako lahko dobimo nepremične točke dane afine transformacije T. Seveda, če je $P(x,y)$ nepremična, potem $P' = T(P) = P(x,y)$. Če vstavimo v analitični enačbi transformacije, dobimo, da

$$\begin{cases} x = ax + by + e \\ y = cx + dy + f \end{cases} \tag{14}$$

Sistem 14 je linearni sistem dveh enačb z dvema neznankama in so možne sledeče rešitve

- sistem nima nobene rešitve, to pomeni, da ni fiksnih točk;
- sistem ima eno in eno samo rešitev, to pomeni, da imamo fiksno točko;
- sistem ni določen oziroma ima neskončno rešitev, to pomeni, da obstaja premica nepremičnih točk. Tej premici pravimo *invariant* afine transformacije T.

4 Nepremične premice

Definicija 4.1. *Naj bo T afina transformacija in $p \subset \mathscr{E}$ premica. Pravimo, da je premica p nepremična oziroma fiksna, če in samo če $T(p) = p$*

4.1 Nepremične točke in premice izometrij

Za izometrije lahkoto brez težav ugotovimo nepremične točke in premice.

Izometrija	Nepremične točke	Nepremične premice
identiteta	vse točke	vse premice
zrcaljenje preko osi	točke na osi	premice pravokotne z osjo
zrcaljenje preko izhodišča	izhodišče	točke, ki vsebujejo izhodišče
vzporedni premik	jih ni	premice vzporedne z vektorjem premika
vrtež okrog točke A	točka A	jih ni

4.2 Iskanje nepremičnih premic afinih transformacij

Naj bo $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ afina transformacija

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

in $T : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$ njena inverzna afina transformacija.

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{\det A}(dx' - by' - de - bf) \\ y = \frac{1}{\det A}(-cx' + ay' + ce - af) \end{cases}$$

Želimo dobiti enačbe vseh premic p, ki jih transformacija T preslika same vase. Enačbe vseh premic, razen snopa premic, ki so vzporedne z ordinato, so $p: \quad y = mx + n$. Za premice ki so vzporedne z ordinato bomo preverili na koncu posebej. Enačbo preslikane premice $p' = T(p)$ dobimo tako, da enačbe inverzne transformacije T^{-1} vstavimo v enačbo premice p. Če to storimo dobimo

$$\frac{1}{\det A}(-cx'+ay'+ce-af) = \mathbf{m}\left(\frac{1}{\det A}(dx' - by' - de - bf)\right)+\mathbf{n} \tag{15}$$

Ko odpravimo oklepaje in ustrezno izpostavimo, bomo dobili enačbo premice $T(p) = p'$

$$y' = \mathbf{m}'x' + \mathbf{n}'$$

Ker mora biti $p = p'$, morata imeti enačbi za p in za p' enake koeficiente, zato mora veljati $m = m'$ in $n = n'$. Iz dveh zadnjih enačb dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama m in n.

$$\begin{cases} m - m' = 0 \\ n - n' = 0 \end{cases}$$

Morebitne rešitve sistema so nepremične premice transformacije T.

Moramo še preveriti ali so premice šopa premic vzporednih ordinati nepremične; te premice imajo enačbo $x = m$. V enačbo vstavimo $x = \frac{1}{\det A}(dx' - by' - de - bf)$ iz inverzne transformacije in dobimo da $\frac{1}{\det A}(dx' - by' - de - bf) = m$. Ko primerno množimo in izpostavimo, imamo enačbo preslikane premice in ta mora biti $x' = m$.

5 Centralna afina transformacija

Definicija 5.1. *Afino transformacijo, ki ima eno in eno samo nepremično točko, imenujemo centralna afina transformacija in točki pravimo središče transformacije.*

Centralna afina transformacija se imenuje *eliptična*, če nima nepremičnih premic; *parabolična*, če ima eno in eno samo nepremično premico; *hiperbolična*, če ima natanko dve nepremični premici.

Linearne transformacije

$$T : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{16}$$

imajo nedvomno izhodišče $O(0,0)$ kot nepremično točko

Primer:

6 Primeri in vaje

6.1 Primer

Preuči transformacijo, ki ima analitično obliko

$$T : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y - 4 \end{cases}$$

Vemo, da je splošna oblika afine transformacije

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

kjer mora biti determinanta matrike $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ različna od nič. V našem primeru je $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in $det\ A = 1$, zato je T afina transformacija in še več je tudi izometrija. Poglejmo, če ima nepremične točke. Točka P je nepremična v primeru in samo v primeru, da $T(P) = P$, zato mora veljati

$$\begin{cases} x = -x \\ y = -y - 4 \end{cases}$$

Sistem ima eno in eno samo rešitev $x = 0$ in $y = -2$, zato je edina nepremična točka $\Omega(0, -2)$. Transformacija T je zato *centralna afina transformacija.*

Če želimo poiskati nepremične premice p, za katere $T(p) = p$ potrebujemo inverzno transformacijo T^{-1}. Takoj ugotovimo, da je

$$T^{-1}: \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' - 4 \end{cases}$$

Opazimo, da je T inverzna sama sebe. Naj bo $p: y = mx + n$ poljubna premica in $p': -y' - 4 = m(-x') + n$ oziroma $p': y' = mx' - 4 - n$ njena slika preko T. Ker mora biti $p' = p$, morata imeti premici enako enačbo, zato mora veljati

$$\begin{cases} m = m \\ n = -4 - n \end{cases}$$

Zgornji sistem dveh enačb z dvema neznankama ima nešteto rešitev in sicer m je poljubno realno število, $n = -2$. Nepremične premice predstavljajo zato šop premic $y = mx - 2$ skozi točko $\Omega(0, -2)$. Transformacija T predstavlja zrcaljenje skozi točko Ω.

6.2 Afina transformacija

Preveri, da je T afina transformacija. Določi tudi njeno inverzno transformacijo.

$$T: \begin{cases} x' = x - 3y + 1 \\ y' = 2x + 3y - 4 \end{cases}$$

6.3 Preveri, da je sledeča transformacija podobnost

$$T: \begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = 2x + 3y - 4 \end{cases}$$

Določi tudi koeficient podobnosti in nato podobnost napiši kot kompozicijo vrteža, raztega in vzporednega premika v pravilnem vrstnem redu.

6.4 Nepremične točke in nepremične premice

Določi invariante (nepremične točke in nepremične premice) sledeče afine transformacije

$$T: \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

6.5 Ploščina preslikanega lika

Določi ploščino dela ravnine, ki ga dobimo, če preslikamo kvadrat z oglišči $A(1, 1); B(1, 2); C(2, 2); D(2, 1)$ s preslikavo

$$T: \begin{cases} x' = 2x - 3y + 11 \\ y' = 4x - 6y - 2 \end{cases}$$

6.6 Simetrija

Določi enačbo parabole, ki je simetrična paraboli z enačbo $y = x^2 + 4$ glede na premico z enačbo $y = -x + 3$.

6.7 Homotetija

Določi homotetijo s centrom v točki $A(4,2)$ in količnikom $k = -2$

6.8 Centralna transformacija

Preveri, da je sledeča afina transformacija *centralna* in nato ugotovi ali je eliptična, parabolična ali pa hiperbolična.

$$T : \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y \end{cases}$$