..■■ *Afine transformacije* ■■..

Analitični pogled
fiksne točke
fiksne premice
Lorentzove transformacije

prof. Walter Auber
Znanstveni licej "France Prešeren"

Trst, marca 2010

Povzetek

V tem članku bomo pokazali, kako so podobnosti in izometrije le posebni primeri afinih transformacij. Pokazali bomo tudi, kako ugotovimo, katere so *fiksne oziroma nepremične točke* in katere so *fiksne oziroma nepremične premice* afinih transformacij. Na koncu bomo preučili Lorentzovo grupo afinih transformacij, to so afine transformacije, ki jih uporabljamo pri Einsteinovi posebni relativnostni teoriji.

"Od sedaj naprej bo nemogoče govoriti samo o času ali samo o prostoru;
absolutna pojma čas in prostor bosta izhlapela
in postala drug drugemu senca.
Samo neka oblika enotnosti med časom in prostorom
lahko zagotovi neodvisno realnost."
Hermann Minkowski
Raum und Zeit, in "Physikalische Zeitschrift", 1908

Kazalo

1 Afine transformacije **3**

2 Podgrupe grupe afinih transformacij **5**
2.1 Podobnosti 5
2.2 Izometrije, zrcaljenje preko poljubne premice 6
2.3 Homotetije 7
2.4 Raztegi 7

3 Nepremične točke **8**

4 Nepremične premice **8**
4.1 Nepremične točke in premice izometrij 8
4.2 Iskanje nepremičnih premic afinih transformacij 9

5 Centralna afina transformacija **9**

6 Lorentzove transformacije **10**
6.1 Čas je invariant Galilejevih transformacij 10
6.2 Svetlobna hitrost je invariant Lorentzovih transformacij . . . 11
6.3 Hiperbolične transformacije 12
6.4 Lorentzove transformacije 14
6.5 Geometrija prosto-čas 15

7 Primeri in vaje **15**
7.1 Primer 15
7.2 Afina transformacija 16
7.3 Preveri, da je sledeča transformacija podobnost 16
7.4 Nepremične točke in nepremične premice 16
7.5 Ploščina preslikanega lika 17
7.6 Simetrija 17
7.7 Homotetija 17
7.8 Centralna transformacija 17

1 Afine transformacije

Ko smo obravnavali transformacije Evklidove ravnine, smo začeli z izometrijami, ki ohranijo razdalje med točkami, nato smo prešli k podobnostim, ki ohranijo razmerje razdalj med točkami in nazadnje smo opredelili še afine transformacije, ki so najbolj splošne in ki zadoščajo edinemu pogoju, da ohranijo premice. V tem članku bomo pokazali, kako so podobnosti in izometrije le posebni primeri afinih transformacij; to pomeni, da so podobnosti in izometrije afine transformacije, ki zadoščajo še dodatnim pogojem. Pokazali bomo tudi, kako ugotovimo, katere so *fiksne točke* in katere so *fiksne premice* afinih transformacij.

Definicija 1.1. *Afina transformacija je bijektivna preslikava Evklidove ravnine, ki ohrani premice, to pomeni, da je slika premice še vedno premica.*

Izrek 1.2. *Afina transformacija ohrani vzporednost oziroma sliki r' in s' dveh vzporednih premic r in s sta vzporedni premici.*

Dokaz: Naj bo T afina transformacija; T je bijektivna preslikava, zato obstaja njena inverzna preslikava T^{-1}. r in s sta vzporedni premici, zato nimata skupnih točk; če bi r' in s' ne bili vzporedni, bi imeli skupno točko A' in $T^{-1}(A')$ bi bila skupna točka r in s, kar je v protislovju z začetno hipotezo.[1] **Q.E.D.**

Izrek 1.3. *Analitična oblika afinih transformacij je sledeča*

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{1}$$

kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Naj bo $r : \alpha x+\beta y+\gamma = 0$ enačba premice in T afina transformacija

$$T : \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

Radi bi pokazali, da je tudi $r' = T(r)$ premica. Kot smo že videli, dobimo enačbo preslikanega predmeta r' s pomočjo inverzne preslikave T^{-1}, saj je

$$r' : \alpha f^{-1}(x', y') + \beta g^{-1}(x', y') + \gamma = 0$$

Razvidno je, da bo r' imela obliko premice $r' : \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' = 0$ samo v primeru, da imamo

$$T^{-1} : \begin{cases} x = f^{-1}(x', y') = \frac{mx'+ny'+p}{qx'+ry'+s} \\ y = g^{-1}(x', y') = \frac{hx'+ky'+j}{qx'+ry'+s} \end{cases}$$

[1]Dokaz po absurdu: osnovna logika nas uči, da je resnica trditve $A \Rightarrow B$ ekvivalentna resnici $\neg B \Rightarrow \neg A$ oziroma $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.

Vstavimo zgornji enačbi v enačbo premice r in dobimo

$$r' : \alpha(\frac{mx' + ny' + p}{qx' + ry' + s}) + \beta(\frac{hx' + ky' + j}{qx' + ry' + s}) + \gamma = 0$$

Če obe strani zgornje enačbe pomnožimo z $qx' + ry' + s$, dobimo zaželeno obliko za r'. Treba je še dodati pogoj bijektivnosti za T: če sta q in r različna od nič, potem preslikava ni surijektivna saj točke $P(x', y')$ za katere je $qx' + ry' + s = 0$ niso slika nobene točke iz dominija. Končno lahko napišemo

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{mx'+ny'+p}{s} = ax' + by' + e \\ y = \frac{hx'+ky'+j}{s} = cx' + dy' + f \end{cases}$$

kjer je $a = \frac{m}{s}, b = \frac{n}{s}, \dots$. Iz prejšnjih enačb za T^{-1} lahko izpeljemo enačbi za T v primeru in samo v primeru, da je sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama rešljiv[2]. Iz linearne algebre vemo, da je to mogoče, če in samo če koeficienti zgornjih enačb zadoščajo neenačbi $ad - bc \neq 0$. V primeru, da $ad - bc = 0$,lahko odštejemo prvo enačbo pomnoženo z d od druge enačbe pomnožene z b in ugotovimo, da x' in y' izgineta: sistem v tem primeru ni rešljiv, torej transformacija T nima inverzne transformacije T^{-1} **Q.E.D.**

Primer: Določi afino transformacijo, ki preslika točke $A(0, 0); B(1, 0); C(0, 1)$ v točke $A'(4, 1); B'(6, 2); C'(3, 4)$.

Veljata še dva zanimiva in koristna izreka.

Izrek 1.4. *Dane tri nekolinearne točke $A, B, C \in \mathscr{E}$ in tri nekolinearne točke $A', B', C' \in \mathscr{E}'$, obstaja ena in ena sama afina transformacija $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$, tako da*

$$T(A) = A',\ T(B) = B',\ T(C) = C'$$

Izrek 1.5. *Afine transformacije ohranijo razmerje med razdaljami med kolinearnimi točkami, oziroma, če imamo tri kolinearne točke $A, B, C \in \mathscr{E}$ za katere velja*

$$\frac{d(A, B)}{d(A, C}) = h$$

potem

$$\frac{d(T(A), T(B))}{d(T(A), T(C)} = h$$

Tudi afine transformacije sestavljajo grupo $\mathscr{A}(\mathscr{E})$ in spadajo v Erlangenski program. Analitična oblika afinih transformacij je

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \tag{3}$$

oziroma z matrikami

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{4}$$

[2] oziroma, ko je T^{-1} injektivna

kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Obvezen je še potreben pogoj za koeficiente a, b, c in d, ki morajo biti taki, da ima 3 inverzno preslikavo: to je $ad - bc \neq 0$. Vrednosti $\Delta = ad - bc$ pravimo *determinanta matrike* in napišemo

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

V strnjeni obliki lahko napišemo tudi

$$X' = A\,X + B \tag{5}$$

kjer je $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Inverzno afino transformacijo

$$T^{-1} : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$$

dobimo tako, da rešimo sistem 3 oziroma sistem 4. Če uporabljamo algebro matrik, najprej obema stranema enačbe $X' = A\ X + B$ odštejemo B in dobimo $X - B = A\ X$, nato pomnožimo obe strani z inverzno matriko A^{-1} in dobimo, da

$$X = A^{-1}(X - B)$$

Inverzna matrika je

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Brez jezika matrik je inverzna afina transformacija

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{det\ A}(dx' - by' - de - bf) \\ y = \frac{1}{det\ A}(-cx' + ay' + ce - af) \end{cases} \tag{6}$$

Izrek 1.6. *Naj bo T afina transformacija, S ploščina sklenjene krivulje in $T(S)$ ploščina preslikane krivulje. Razmerje med ploščino preslikane krivulje $T(S)$ in ploščino krivulje S je konstantno in*

$$\frac{T(S)}{S} = |detA|$$

2 Podgrupe grupe afinih transformacij

2.1 Podobnosti

Smo že ugotovili, da je množica podobnosti podmnožica množice afinih transformacij in da je tudi njena podgrupa v kolikor je kompozicija podobnosti podobnost, vsaka podobnost ima inverzno transformacijo in identiteta je podobnost. Velja sledeči izrek.

Izrek 2.1. *Afina transformacija T*

$$T: \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

je podobnost, če in samo če

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Dokaz: Vemo, da je analitična oblika podobnosti

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Iz tega sledi, da so $a = k\cos(\alpha)$, $b = -k\sin(\alpha)$, $c = k\sin(\alpha)$ in $d = k\cos(\alpha)$. Zato, ko imamo afino transformacijo, ki zadošča pogojem 7 lahko določimo k in α, da so zadovoljene zgornje enakosti. **Q.E.D.**

Številu $k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$ pravimo *količnik podobnosti.*

Primer: Pokaži, da je sledeča afina transformacija podobnost in izračunaj njen količnik podobnosti.

$$T: \begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = 2x + 3y - 4 \end{cases}$$

2.2 Izometrije, zrcaljenje preko poljubne premice

Afina transformacija T je izometrija, če in samo če je podobnost s količnikom podobnosti enakim ena

$$k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} = 1$$

Poglejmo sedaj, kako dobimo enačbe zrcaljenja S_p preko neke premice $p: \; y = mx + n$. Če je $P(x, y)$ poljubna točka in $P'(x'y')$ njena slika preko zrcaljenja S_p, potem velja, da:

- središčna točka M med P in P' leži na premici p in $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$
- premica skozi P in P' je pravokotna na premico p in ima zato strmino $-\frac{1}{m}$

Če koordinati točke M vstavimo v enačbo premice p, dobimo

$$\frac{y + y'}{2} = m\left(\frac{x + x'}{2}\right) + n \tag{8}$$

če izračunamo strmino premice, ki vsebuje P in P' kot razmerje razlike koordinat, dobimo

$$-\frac{1}{m} = \frac{y' - y}{x' - x} \tag{9}$$

Če združimo enačbi 8 in 9, dobimo

$$\begin{cases} \frac{y+y'}{2} = m\left(\frac{x+x'}{2}\right) + n \\ -\frac{1}{m} = \frac{y'-y}{x'-x} \end{cases} \tag{10}$$

To je sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama x' in y'. Ko sistem rešimo, dobimo analitično obliko preslikave.

Problem lahko rešimo tudi vektorsko. Naj bo $\overrightarrow{OP'}$ vektor položaja točke P', $\overrightarrow{OP}$ vektor položaja točke P in $\overrightarrow{OM'}$ vektor položaja točke M. Razvidno je, da velja

$$\begin{aligned} O\vec{P}' &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \\ &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PM} = \\ &= \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) = \\ &= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

Koordinati vektorja $\overrightarrow{OP'}$ predstavljata koordinati preslikane točke P'.

2.3 Homotetije

Izrek 2.2. *Afine transformacije oblike*

$$T : \begin{cases} x' = & ax & & +e \\ y' = & & ay & +f \end{cases} \tag{11}$$

predstavljajo homotetije okrog točke $A\left(\frac{e}{1-a}, \frac{f}{1-a}\right)$.

Dokaz: Če homotetijo okrog poljubne točke $A(l, m)$ napišemo kot kompozicijo treh transformacij

$$\mathscr{E} \xrightarrow{T_{-l\mathbf{i}-m\mathbf{j}}} \mathscr{E}' \xrightarrow{h_{0,k}} \mathscr{E}'' \xrightarrow{T_{l\mathbf{i}+m\mathbf{j}}} \mathscr{E}'''$$

dobimo, da

$$T : \begin{cases} x''' = kx + l(1-k) \\ y''' = ky + m(1-k) \end{cases} \tag{12}$$

Če primerjamo enačbi 11 in 12, je razvidno, da če zamenjamo $k = a$ in $e = l(1-k)$ ter $f = m(1-k)$ je izrek dokazan. **Q.E.D.**

2.4 Raztegi

Razteg je afina transformacija tipa

$$T : \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

3 Nepremične točke

Definicija 3.1. *Naj bo T afina transformacija in $P \in \mathscr{E}$ točka. Pravimo, da je točka P nepremična oziroma fiksna, če in samo če $T(P) = P$*

Afinim transformacijam T, ki imajo izhodišče kot nepremično točko, pravimo *linearne* transformacije. Njihove enačbe so sledeče:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{13}$$

Z lahkoto dokažemo, da $T(P + Q) = T(P) + T(Q)$ in da $T(kP) = kT(P)$, kjer so $P, Q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $k \in \mathbb{R}$; to je tudi razlog, da jih imenujemo linearne transformacije.

Poglejmo sedaj, kako lahko dobimo nepremične točke dane afine transformacije T. Seveda, če je $P(x, y)$ nepremična, potem $P' = T(P) = P(x, y)$. Če vstavimo v analitični enačbi transformacije, dobimo, da

$$\begin{cases} x = ax + by + e \\ y = cx + dy + f \end{cases} \tag{14}$$

Sistem 14 je linearni sistem dveh enačb z dvema neznankama in so možne sledeče rešitve

- sistem nima nobene rešitve, to pomeni, da ni fiksnih točk;
- sistem ima eno in eno samo rešitev, to pomeni, da imamo fiksno točko;
- sistem ni določen oziroma ima neskončno rešitev, to pomeni, da obstaja premica nepremičnih točk. Tej premici pravimo *invariant* afine transformacije T.

4 Nepremične premice

Definicija 4.1. *Naj bo T afina transformacija in $p \subset \mathscr{E}$ premica. Pravimo, da je premica p nepremična oziroma fiksna, če in samo če $T(p) = p$*

4.1 Nepremične točke in premice izometrij

Za izometrije lahkoto brez težav ugotovimo nepremične točke in premice.

Izometrija	**Nepremične točke**	**Nepremične premice**
identiteta	vse točke	vse premice
zrcaljenje preko osi	točke na osi	premice pravokotne z osjo
zrcaljenje preko izhodišča	izhodišče	točke, ki vsebujejo izhodišče
vzporedni premik	jih ni	premice vzporedne z vektorjem premika
vrtež okrog točke A	točka A	jih ni

4.2 Iskanje nepremičnih premic afinih transformacij

Naj bo $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ afina transformacija

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

in $T : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$ njena inverzna afina transformacija.

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{det\ A}(dx' - by' - de - bf) \\ y = \frac{1}{det\ A}(-cx' + ay' + ce - af) \end{cases}$$

Želimo dobiti enačbe vseh premic p, ki jih transformacija T preslika same vase. Enačbe vseh premic, razen snopa premic, ki so vzporedne z ordinato, so $p: \ y = mx + n$. Za premice ki so vzporedne z ordinato bomo preverili na koncu posebej. Enačbo preslikane premice $p' = T(p)$ dobimo tako, da enačbe inverzne transformacije T^{-1} vstavimo v enačbo premice p. Če to storimo dobimo

$$\frac{1}{det\ A}(-cx' + ay' + ce - af) = \mathbf{m}\left(\frac{1}{det\ A}(dx' - by' - de - bf)\right) + \mathbf{n} \quad (15)$$

Ko odpravimo oklepaje in ustrezno izpostavimo, bomo dobili enačbo premice $T(p) = p'$

$$y' = \mathbf{m}'x' + \mathbf{n}'$$

Ker mora biti $p = p'$, morata imeti enačbi za p in za p' enake koeficiente, zato mora veljati $m = m'$ in $n = n'$. Iz dveh zadnjih enačb dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama m in n.

$$\begin{cases} m - m' = 0 \\ n - n' = 0 \end{cases}$$

Morebitne rešitve sistema so nepremične premice transformacije T.

Moramo še preveriti ali so premice šopa premic vzporednih ordinati nepremične; te premice imajo enačbo $x = m$. V enačbo vstavimo $x = \frac{1}{det\ A}(dx' - by' - de - bf)$ iz inverzne transformacije in dobimo da $\frac{1}{det\ A}(dx' - by' - de - bf) = m$. Ko primerno množimo in izpostavimo, imamo enačbo preslikane premice in ta mora biti $x' = m$.

5 Centralna afina transformacija

Definicija 5.1. *Afino transformacijo, ki ima eno in eno samo nepremično točko, imenujemo centralna afina transformacija in točki pravimo središče transformacije.*

Centralna afina transformacija se imenuje *eliptična*, če nima nepremičnih premic; *parabolična*, če ima eno in eno samo nepremično premico; *hiperbolična*, če ima natanko dve nepremični premici.

Linearne transformacije

$$T : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{16}$$

imajo nedvomno izhodišče $O(0,0)$ kot nepremično točko

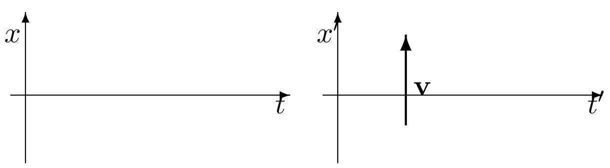
6 Lorentzove transformacije

"Od sedaj naprej bo nemogoče govoriti samo o času ali samo o prostoru;
absolutna pojma čas in prostor bosta izhlapela
in postala drug drugemu senca.
Samo neka oblika enotnosti med časom in prostorom
lahko zagotovi neodvisno realnost."
***Hermann Minkowski**, Raum und Zeit, in "Physikalische Zeitschrift", 1908*

Lorentzove transformacije, oziroma grupa Lorentzovih transformacij, igra osnovno vlogo v Einsteinovi *posebni relativnostni teoriji.* Teorija je osnovana na hipotezi, da je *svetlobna hitrost c v vakuumu konstantna*, to je neodvisna od inercialnega referenčnega sistema v katerem jo meri nek opazovalec. Podgrupa Lorentzovih transformacij je podgrupa linearnih transformacij, ki zadoščajo dodatnemu pogoju, da ostane c nespremenjen. V tem poglavju želimo natanko opisati to podgrupo.

6.1 Čas je invariant Galilejevih transformacij

Poglejmo najprej Galilejeve transformacije, oziroma grupo Galilejevih transformacij, katero sestavljajo transformacije Evklidove ravnine, ki ohranijo razdaljo; smo že videli, da so to izometrije. Naj se točka P pomika po premici. Točko opazujemo iz dveh inercialnih koordinatnih sistemov, ki se pomikajo eden glede na drugega s konstantno hitrostjo $\vec{v}$ vzporedno s premico po kateri se pomika točka. Točka ima torej dve koordinati $P(t,x)$ v prvem koordinatnem sistemu in dve koordinati $P(t',x')$ v drugem koordinatnem sistemu. Če želimo dobiti koordinati $P'(t',x')$ glede na koordinati



$P(t,x)$, moramo dobiti afino transformacijo T, ki primerno preslika Evklidovo ravnino. V Galilejevi fiziki, je čas absoluten, to pomeni neodvisen od referenčnega sistema v katerem opazujemo uro, ki meri čas, zato $t' = t$. Iz slike je razvidno, da je tudi $x' = x - vt$. Galilejeve transformacije so torej

$$T : \begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \tag{17}$$

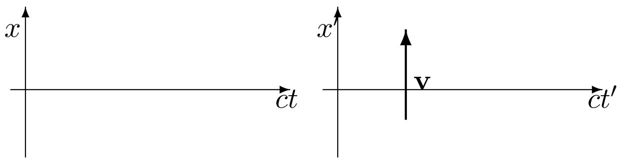
oziroma v jeziku matrik

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

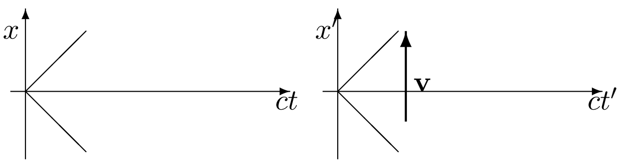
Matrika ima determinanto $det \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, zato je izometrija.

6.2 Svetlobna hitrost je invariant Lorentzovih transformacij

Naj se točka P pomika po premici. Točko opazujemo iz dveh inercialnih koordinatnih sistemov, ki se pomikajo eden glede na drugega s konstantno hitrostjo $\vec{v}$ vzporedno s premico po kateri se pomika točka. Točka ima torej dve koordinati; recimo $P(ct, x)$ v prvem koordinatnem sistemu in dve koordinati $P(ct', x')$ v drugem koordinatnem sistemu. Želeli bi dobiti linearno preslikavo ravnine T, tako da $P' = T(P)$ in tako da, če se točka P giblje s svetlobno hitrostjo, se bo tudi preslikana točka P' premikala s svetlobno hitrostjo, saj je svetlobna hitrost neodvisna od referenčnega sistema iz katerega opazujemo predmet, ki se z njo pomika. Si lahko predstavljamo, da je točka P fronta svetlobnega valovanja. Če se P giblje s svetlobno hitro-



stjo, ima enačbo $p : x = ct$, ki predstavlja premico s strmino ena v našem koordinatnem sistemu. Ker se mora tudi P' premikati s svetlobno hitrostjo, bo imela enačbo $p' : x' = ct'$. Premica p je zato *fiksna* oziroma nepremična premica za iskano transformacijo T. Prav tako je nepremična tudi premica



$q : x = -ct$, ki predstavlja samo različno smer premikanja točke.

Ugotovili smo, da sta premici z enačbama $x - ct = 0$ in $x + ct = 0$ nepremični. Če obe enačbi med seboj pomnožimo, dobimo, da $(x - ct)(x + ct) = 0$, oziroma

$$x^2 - c^2t^2 = 0.$$

Premici p in q, ki ju izraža zgornja enačba, predstavljata torej svetlobni stožec po katerem se pomikajo svetlobne fronte. V našem primeru smo upoštevali le eno prostorsko dimenzijo x in eno časovno koordinato ct, če pa upoštevamo še ostali dve y in z, dobimo enačbo

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0,$$

ki je enačba stožca v štirirazsežnem prostoru x, y, z, ct. V Klasični mehanika predpostavljamo, da za dva *sočasna dogodka*, na primer sočasno opazovanje določene premikajoče točke iz dveh različnih referenčnih sistemov $P(t, x)$ in $P'(t', x')$, velja $t = t'$. Posledica te hipoteze so Galilejeve transformacije. Relativnostna mehanika pa poveže *sočasna dogodka* $P(ct, x)$ in $P'(ct', x')$ drugače. Zahteva, da pri prehodu iz enega referenčnega sistema do drugega ostane izraz $x^2 - c^2t^2$ nespremenjen

Iskali bomo sedaj linearno[3] transformacijo T

$$T : \begin{cases} x' = ax + bt \\ t' = cx + dt \end{cases} \tag{19}$$

oziroma z matrikami

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{20}$$

tako, da se enačba $x^2 - c^2t^2 = 0$ ne spremeni, oziroma, da velja

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \tag{21}$$

Geometriji, ki ohrani razdaljo[4] na ravnini, pravimo *Evklidova geometrija*; geometriji, ki ohrani enačbo 21 pa pravimo *pseudoevklidova ravnina* oziroma *hiperbolična ravnina*[5].

6.3 Hiperbolične transformacije

Pustimo za trenutek fiziko ob strani in vrnimo se k linearnim transformacijam $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$. Naj bosta $P(x, y)$ in $P'(x', y')$ točka in njena slika preko transformacije T. V tem poglavju bomo iz vseh afinih transformacij izbrali tiste, ki imajo premici $p : x - y = 0$ in $q : x + y = 0$, simetrali prvega in tretjega kvadranta, kot nepremični premici. Take transformacije ohranijo vrednost $x^2 - y^2$.

Izrek 6.1. *Linearna preslikava $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$, za katero velja, da $x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2$, je*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{22}$$

[3] Transformacija T mora biti *linearna*, ker želimo, da sta sistema koordinat med seboj inercialna. Prvi odvod linearne transformacije je konstanta, drugi odvod pa je nič: iz tega sledi, da se pospešek točke ne spremeni, če ga merimo v enem ali drugem referenčnem sistemu.

[4] $x^2 + (ct)^2 = x'^2 + (ct')^2$

[5] hiperboličma ravnina v kolikor za katerokoli realno število a predstavlja enačba $x^2 - (ct)^2 = a$ hiperbolo v pravokotnem koordinatnem sistemu x in ct

kjer je $\beta \in (-1, 1)$ *oziroma brez matrik*

$$T : \begin{cases} x' = \frac{x+\beta y}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \frac{\beta x + y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{23}$$

Dokaz: Če za poljubno linearno preslikavo T

$$T : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{24}$$

velja, da

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2$$

sledi, da

$$x^2 - y^2 = (ax + by)^2 - (cx + dy)^2.$$

Če rešimo oklepaje in preuredimo, dobimo

$$(a^2 - c^2 - 1)x^2 + 2(ab - cd)xy + (b^2 - d^2 + 1)y^2 = 0.$$

Ker mora zgornja enakost veljati za katerikoli par realnih števil x in y in ker zaradi osnovnega izreka algebre ima polinom druge stopnje največ dve realni rešitvi, sledi, da

$$\begin{cases} a^2 - c^2 - 1 = 0 \\ ab - cd = 0 \\ b^2 - d^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Dobili smo sistem s štirimi neznankami in tremi enačbami. Tak sistem ima neskončno rešitev: tri neznanke lahko izrazimo glede na eno samo, ki jo bomo imenovali β. Iz druge enačbe dobimo, da $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$ in imenujmo to razmerje $\frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \beta$. Sedaj lahko napišemo, da $c = \beta a$ in $b = \beta d$ ter vstavimo v prvo in tretjo enačbo sistema; dobili bomo

$$\begin{cases} a^2 - (\beta a)^2 - 1 = 0 \\ (\beta d)^2 - d^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

oziroma

$$\begin{cases} a^2(1 - \beta^2) - 1 = 0 \\ d^2(\beta^2 - 1) + 1 = 0 \end{cases}$$

oziroma, če drugo enačbo pomnožimo z -1

$$\begin{cases} a^2(1 - \beta^2) = 1 \\ d^2(1 - \beta^2) = 1 \end{cases}$$

Končno, če $|\beta| < 1$, delimo obe strani enačb z $1 - \beta^2$ in dobimo

$$a^2 = d^2 = \frac{1}{(1 - \beta^2)}$$

oziroma

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Če združimo naše ugotovitve, dobimo zaželeno preslikavo

$$T : \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}y \\ y' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}y \end{cases} \tag{25}$$

Q.E.D.

Dobljeno transformacijo lahko izrazimo tudi s pomočjo tako imenovanih hiperboličnih trigonometričnih funkcij: to sta

$$\sinh(\phi) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

in

$$\cosh(\phi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Razvidno je, da je $\sinh(\phi)$ liha funkcija, da je $\cosh(\phi)$ soda funkcija, da je $\sinh(0) = 0$ in da $\cosh(0) = 1$ kot za sorodne trigonometrične funkcije in tudi, da $\cosh(\phi)^2 - \sinh(\phi)^2 = 1$. Nedvomno obstaja primeren kot ϕ, tako da veljata istočasno

$$\begin{cases} \cosh(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \sinh(\phi) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

Sedaj lahko napišemo Lorentzovo transformacijo kot

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{26}$$

ki predstavlja nekak "vrtež"v hiperbolični geometriji.

6.4 Lorentzove transformacije

Če v zgornji izrek vstavimo $x = ct$ in $y = x$, dobimo

$$T : \begin{cases} ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}ct + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x \\ x' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x \end{cases} \tag{27}$$

To je preslikava, za katero $x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2$ oziroma za katero $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$, kar je to kar smo iskali. Obliko preslikave lahko delno spremenimo

$$L : \begin{cases} t' = \frac{t + \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' = \frac{c\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{28}$$

Opazujmo sedaj točko $P'(ct, 0)$. Iz druge Lorentzove enačbe dobimo

$$0 = \frac{c\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

oziroma

$$x = -c\beta t$$

Ker je hitrost med referenčnima sistemoma v, lahko tudi napišemo, da $x = vt$ in zaključimo, da $-c\beta = v$, oziroma $\beta = -\frac{v}{c}$. Smo torej dokončno opredelili Lorentzove transformacije: predpostavljali smo le, da sta sistema inercialna in da je hitrost svetlobe neodvisna od referenčnega sistema iz katerega jo opazujemo.

6.5 Geometrija prosto-čas

Lorentzove transformacije sestavljajo grupo: identiteta je transformacija z $\beta = 0$; vsaka transformacija ima inverzno transformacijo, saj je determinanta matrike Lorentzovih transformacij vedno različna od nič; kompozicija Lorentzovih transformacij je še vedno Lorentzova transformacija. Po Felixu Kleinu torej lahko govorimo o geometriji Lorentzove grupe transformacij. V tej geometriji *prostor* in *čas* nista ločeni in neodvisni fizikalni količini, ampak se prepletata in spreminjata glede na referenčni sistem iz katerega opazujemo pojav. Matematik Hermann Minkowski je leta 1908 prvi govoril o geometriji prostor-čas.

7 Primeri in vaje

7.1 Primer

Preuči transformacijo, ki ima analitično obliko

$$T : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y - 4 \end{cases}$$

Vemo, da je splošna oblika afine transformacije

$$T : \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

kjer mora biti determinanta matrike $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ različna od nič. V našem primeru je $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in $det\ A = 1$, zato je T afina transformacija in še več je tudi izometrija. Poglejmo, če ima nepremične točke. Točka P je nepremična v primeru in samo v primeru, da $T(P) = P$, zato mora veljati

$$\begin{cases} x = -x \\ y = -y - 4 \end{cases}$$

Sistem ima eno in eno samo rešitev $x = 0$ in $y = -2$, zato je edina nepremična točka $\Omega(0, -2)$. Transformacija T je zato *centralna afina transformacija.*

Če želimo poiskati nepremične premice p, za katere $T(p) = p$ potrebujemo inverzno transformacijo T^{-1}. Takoj ugotovimo, da je

$$T^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' - 4 \end{cases}$$

Opazimo, da je T inverzna sama sebe. Naj bo $p : y = mx + n$ poljubna premica in $p' : -y' - 4 = m(-x') + n$ oziroma $p' : y' = mx' - 4 - n$ njena slika preko T. Ker mora biti $p' = p$, morata imeti premici enako enačbo, zato mora veljati

$$\begin{cases} m = m \\ n = -4 - n \end{cases}$$

Zgornji sistem dveh enačb z dvema neznankama ima nešteto rešitev in sicer m je poljubno realno število, $n = -2$. Nepremične premice predstavljajo zato šop premic $y = mx - 2$ skozi točko $\Omega(0, -2)$. Transformacija T predstavlja zrcaljenje skozi točko Ω.

7.2 Afina transformacija

Preveri, da je T afina transformacija. Določi tudi njeno inverzno transformacijo.

$$T : \begin{cases} x' = x - 3y + 1 \\ y' = 2x + 3y - 4 \end{cases}$$

7.3 Preveri, da je sledeča transformacija podobnost

$$T : \begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = 2x + 3y - 4 \end{cases}$$

Določi tudi koeficient podobnosti in nato podobnost napiši kot kompozicijo vrteža, raztega in vzporednega premika v pravilnem vrstnem redu.

7.4 Nepremične točke in nepremične premice

Določi invariante (nepremične točke in nepremične premice) sledeče afine transformacije

$$T : \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

7.5 Ploščina preslikanega lika

Določi ploščino dela ravnine, ki ga dobimo, če preslikamo kvadrat z oglišči $A(1,1); B(1,2); C(2,2); D(2,1)$ s preslikavo

$$T : \begin{cases} x' = 2x - 3y + 11 \\ y' = 4x - 6y - 2 \end{cases}$$

7.6 Simetrija

Določi enačbo parabole, ki je simetrična paraboli z enačbo $y = x^2 + 4$ glede na premico z enačbo $y = -x + 3$.

7.7 Homotetija

Določi homotetijo s centrom v točki $A(4,2)$ in količnikom $k = -2$

7.8 Centralna transformacija

Preveri, da je sledeča afina transformacija *centralna* in nato ugotovi ali je eliptična, parabolična ali pa hiperbolična.

$$T : \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y \end{cases}$$